**第十五章推理与证明**

id:2147492221;FounderCES

题组1合情推理与演绎推理

1*.*[2016北京,8,5分][理]袋中装有偶数个球,其中红球、黑球各占一半*.*甲、乙、丙是三个空盒*.*每次从袋中任意取出两个球,将其中一个球放入甲盒,如果这个球是红球,就将另一个球放入乙盒,否则就放入丙盒*.*重复上述过程,直到袋中所有球都被放入盒中,则()

A.乙盒中黑球不多于丙盒中黑球

B.乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

C.乙盒中红球不多于丙盒中红球

D.乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

2*.*[2015 山东,11,5分][理]观察下列各式:

*=*40;

*+=*41;

*++=*42;

*+++=*43;

……

照此规律,当*n*∈N*\**时,

*+++*…*+=　　　.*

3*.*[2014安徽,12,5分]如图15*-*1,在等腰直角三角形*ABC*中,斜边*BC=*2*.*过点*A*作*BC*的垂线,垂足为*A*1;过点*A*1作*AC*的垂线,垂足为*A*2;过点*A*2作*A*1*C*的垂线,垂足为*A*3;…,依此类推*.*设*BA=a*1,*AA*1*=a*2,*A*1*A*2*=a*3,…,*A*5*A*6*=a*7,则*a*7*=　　　.*

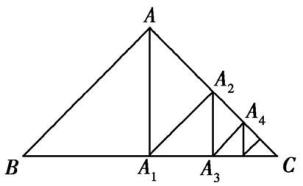


图15*-*1

4*.*[2014陕西,14,5分][理]观察分析下表中的数据:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 多面体 | 面数(*F*) | 顶点数(*V*) | 棱数(*E*) |
| 三棱柱 | 5 | 6 | 9 |
| 五棱锥 | 6 | 6 | 10 |
| 立方体 | 6 | 8 | 12 |

猜想一般凸多面体中*F*,*V*,*E*所满足的等式是*.*

题组2直接证明与间接证明

5*.*[2017北京,20,13分][理]设{*an*}和{*bn*}是两个等差数列,记*cn=*max{*b*1*-a*1*n*,*b*2*-a*2*n*,…,*bn-ann*}(*n=*1,2,3,…),其中max{*x*1,*x*2,…,*xs*}表示*x*1,*x*2,…,*xs*这*s*个数中最大的数*.*

(Ⅰ)若*an=n*,*bn=*2*n-*1,求*c*1,*c*2,*c*3的值,并证明{*cn*}是等差数列;

(Ⅱ)证明:或者对任意正数*M*,存在正整数*m*,当*n*≥*m*时,*>M*;或者存在正整数*m*,使得*cm*,*cm+*1,*cm+*2,…是等差数列*.*

6*.*[2015江苏,20,16分][理]设*a*1,*a*2,*a*3,*a*4是各项为正数且公差为*d*(*d*≠0)的等差数列*.*

(1)证明:,,,依次构成等比数列;

(2)是否存在*a*1,*d*,使得*a*1,,,依次构成等比数列?并说明理由;

(3)是否存在*a*1,*d*及正整数*n*,*k*,使得,,,依次构成等比数列?并说明理由*.*

题组3数学归纳法

7*.*[2014安徽,21,13分][理]设实数*c>*0,整数*p>*1,*n*∈N*\*.*

(Ⅰ)证明:当*x>-*1且*x*≠0时,(1*+x*)*p>*1*+px*;

(Ⅱ)数列{*an*}满足*a*1*>*,*an+*1*=an+.*证明:*an>an+*1*>.*

id:2147492264;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018郑州一中高三入学测试,12]数学上称函数*y=kx+b*(*k*,*b*∈R,*k*≠0)为线性函数*.*对于非线性可导函数*f*(*x*),在点*x*0附近一点*x*的函数值*f*(*x*),可以用如下方法求其近似代替值:*f*(*x*)≈*f*(*x*0)*+f* *'*(*x*0)(*x-x*0)*.*利用这一方法,*m=*的近似代替值()

A.大于*m* B.小于*m* C.等于*m* D.与*m*的大小关系无法确定

2*.*[2018吉林百校联盟联考,5]甲、乙、丙三人参加某公司的面试,最终只有一人能够被该公司录用,得到面试结果以后,甲说:丙被录用了;乙说:甲被录用了;丙说:我没被录用*.*若这三人中仅有一人说法错误,则下列结论正确的是()

A.丙被录用了 B.乙被录用了

C.甲被录用了 D.无法确定谁被录用了

3*.*[2017南昌市三模,4]已知13*+*23*=*()2,13*+*23*+*33*=*()2,13*+*23*+*33 *+*43*=*()2,…,若13*+*23*+*33*+*43*+*…*+n*3*=*3 025,则*n=*()

A.8 B.9 C.10 D.11

4*.*[2017长春市高三第二次质量监测,14] 将1,2,3,4,…这样的正整数按如图15*-*2所示的方式排成三角形数组,则第10行左数第10个数为*.*

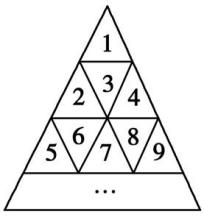
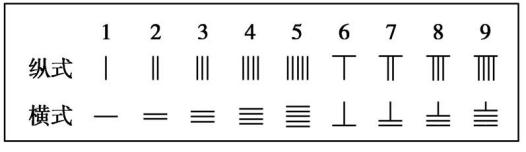


图15*-*2

5*.*[2017甘肃兰州高考实战模拟,14]观察下列式子:1,1*+*2*+*1,1*+*2*+*3*+*2*+*1,1*+*2*+*3*+*4*+*3*+*2*+*1,…,由以上可推测出一个一般性结论:对于*n*∈N*\**,则1*+*2*+*…*+n+*…*+*2*+*1*=　　　　.*

6*.*[2017郑州市高三第三次质量预测,13][数学文化题]中国有个名句“运筹帷幄之中,决胜千里之外*.*”其中的“筹”原意是指《孙子算经》中记载的算筹,古代是用算筹来进行计算,算筹是将几寸长的小竹棍摆在平面上进行运算,算筹的摆放有纵横两种形式,如下表:



表示一个多位数时,像阿拉伯计数一样,把各个数位的数码从左到右排列,但各位数码的筹式需要纵横相间,个位、百位、万位数用纵式表示,十位、千位、十万位用横式表示,以此类推,例如6 613用算筹表示就是id:2147492292;FounderCES,则5 288用算筹可表示为*.*

**B组提升题**

7*.*[2017长沙市五月模拟,7]某班级有一个学生*A*在操场上绕圆形跑道逆时针方向匀速跑步,每52秒跑完一圈,在学生*A*开始跑步时,在教室内有一个学生*B*,往操场看了一次,以后每50秒他都往操场看一次,则该学生*B*“感觉”到学生*A*的运动是()

A.逆时针方向匀速前跑

B.顺时针方向匀速前跑

C.顺时针方向匀速后退

D.静止不动

8*.*[2017沈阳市高三三模,9][数学文化题]“杨辉三角”又称“贾宪三角”,是因为贾宪约在公元1050年首先使用“贾宪三角”进行高次开方运算,而杨辉在公元1261年所著的《详解九章算法》一书中,辑录了贾宪三角形数表,并称之为“开方作法本源”图*.*下列数表的构造思路就源于“杨辉三角”*.*该表由若干行数字组成,从第二行起,每一行中的数字均等于其“肩上”两数之和,表中最后一行仅有一个数,则这个数是()

2 0172 0162 0152 014……654321

4 0334 0314 029……………119753

8 0648 060……………………2016128

16 124 …………………………362820

…………………………

A.2 017×22 016 B.2 018×22 015 C.2 017×22 015 D.2 018*×*22 016

9*.*[2018山东省东明一中模拟,15]古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数,如三角形数1,3,6,10,…,第*n*个三角形数为,记第*n*个*k*边形数为*N*(*n*,*k*)(*k*≥3),以下列出了部分*k*边形数中第*n*个数的表达式:

三角形数: *N*(*n*,3)*=n*2*+n*;正方形数: *N*(*n*,4)*=n*2;五边形数: *N*(*n*,5)*=n*2*-n*;六边形数: *N*(*n*,6)*=*2*n*2*-n*,…,由此推测*N*(8,8)*=　　　　.*

10*.*[2017长春市高三第四次质量监测,16]有甲、乙二人去看望高中数学老师张老师,期间他们做了一个游戏,张老师的生日是*m*月*n*日,张老师把*m*告诉了甲,把*n*告诉了乙,然后张老师列出来如下10个日期供选择:2月5日,2月7日,2月9日,5月5日,5月8日,8月4日,8月7日,9月4日,9月6日,9月9日*.*看完日期后,甲说:“我不知道,但你一定也不知道*.*”乙听了甲的话后,说:“本来我不知道,但现在我知道了*.*”甲接着说:“哦,现在我也知道了*.*”请问,张老师的生日是*.*

**答案**

id:2147495383;FounderCES

1*.*B若袋中有两个球,则红球、黑球各一个,若红球放在甲盒,则黑球放在乙盒,丙盒中没有球,此时乙盒中黑球多于丙盒中黑球,乙盒中黑球比丙盒中红球多,故可排除A,D;若袋中有四个球,则红球、黑球各两个, 若取出两个红球,则红球一个放在甲盒,余下一个放在乙盒,再取出余下的两个黑球,一个放在甲盒,则余下一个放在丙盒,所以甲盒中一红一黑,乙盒中一个红球,丙盒中一个黑球,此时乙盒中红球比丙盒中红球多,排除C,选B.

2*.*4*n-*1第一个等式,*n=*1,而右边式子为40*=*41*-*1;

第二个等式,*n=*2,而右边式子为41*=*42*-*1;

第三个等式,*n=*3,而右边式子为42*=*43*-*1;

第四个等式,*n=*4,而右边式子为43*=*44*-*1;

……

归纳可知,第*n*个等式的右边为4*n-*1*.*

3*.*解法一直接递推归纳:等腰直角三角形*ABC*中,斜边*BC=*2,所以*AB=AC=a*1*=*2,*AA*1*=a*2*=*,*A*1*A*2*=a*3*=*1,…,*A*5*A*6*=a*7*=a*1*×*()6*=.*

解法二求通项:等腰直角三角形*ABC*中,斜边*BC=*2,所以*AB=AC=a*1*=*2,*AA*1*=a*2*=*,…,*An-*1*An=an+*1*=*sin ·*an=an=*2*×*()*n*,故*a*7*=*2*×*()6*=.*

4*.F+V-E=*2三棱柱中5*+*6*-*9*=*2;五棱锥中6*+*6*-*10*=*2;立方体中6*+*8*-*12*=*2,由此归纳可得*F+V-E=*2*.*

5*.*(Ⅰ)*c*1*=b*1*-a*1*=*1*-*1*=*0,

*c*2*=*max{*b*1*-*2*a*1,*b*2*-*2*a*2}*=*max{1*-*2*×*1,3*-*2*×*2}*=-*1,

*c*3*=*max{*b*1*-*3*a*1,*b*2*-*3*a*2,*b*3*-*3*a*3}*=*max{1*-*3*×*1,3*-*3*×*2,5*-*3*×*3}*=-*2*.*

当*n*≥3时,(*bk+*1*-nak+*1)*-*(*bk-nak*)*=*(*bk+*1*-bk*)*-n*(*ak+*1*-ak*)*=*2*-n<*0,

所以*bk-nak*关于*k*∈N*\**单调递减*.*

所以*cn=*max{*b*1*-a*1*n*,*b*2*-a*2*n*,…,*bn-ann*}*=b*1*-a*1*n=*1*-n.*

所以对任意*n*≥1,*cn=*1*-n*,于是*cn+*1*-cn=-*1,

所以{*cn*}是等差数列*.*

(Ⅱ)设数列{*an*}和{*bn*}的公差分别为*d*1,*d*2,则

*bk-nak=b*1*+*(*k-*1)*d*2*-*[*a*1*+*(*k-*1)*d*1]*n*

*=b*1*-a*1*n+*(*d*2*-nd*1)(*k-*1),

所以*cn=*

①当*d*1*>*0时,

取正整数*m>*,则当*n*≥*m*时,*nd*1*>d*2,因此*cn=b*1*-a*1*n.*

此时,*cm*,*cm+*1,*cm+*2,…是等差数列*.*

②当*d*1*=*0时,对任意*n*≥1,

*cn=b*1*-a*1*n+*(*n-*1)max{*d*2,0}*=b*1*-a*1*+*(*n-*1)(max{*d*2,0}*-a*1)*.*

此时,*c*1,*c*2,*c*3,…,*cn*,…是等差数列*.*

③当*d*1*<*0时,

当*n>*时,有*nd*1*<d*2,

所以*=*

*=-nd*1*+d*1*-a*1*+d*2*+*

≥*-nd*1*+d*1*-a*1*+d*2*-|b*1*-d*2*|.*

对任意正数*M*,取正整数*m>*max{,},则当*n*≥*m*时,*>M.*

6*.*(1)因为*==*2*d*(*n=*1,2,3)是同一个常数,

所以,,,依次构成等比数列*.*

(2)令*a*1*+d=a*,则*a*1,*a*2,*a*3,*a*4分别为*a-d*,*a*,*a+d*,*a+*2*d*(*a>d*,*a>-*2*d*,*d*≠0)*.*

假设存在*a*1,*d*,使得*a*1,,,依次构成等比数列,

则*a*4*=*(*a-d*)(*a+d*)3,且(*a+d*)6*=a*2(*a+*2*d*)4*.*

令*t=*,则1*=*(1*-t*)(1*+t*)3,且(1*+t*)6*=*(1*+*2*t*)4(*-<t<*1,*t*≠0),

化简得*t*3*+*2*t*2*-*2*=*0*①*;

且*t*2*=t+*1*.*将*t*2*=t+*1代入*①*式,得

*t*(*t+*1)*+*2(*t+*1)*-*2*=t*2*+*3*t=t+*1*+*3*t=*4*t+*1*=*0,则*t=-.*

显然*t=-*不是上面方程的解,矛盾,所以假设不成立,

因此不存在*a*1,*d*,使得*a*1,,,依次构成等比数列*.*

(3)假设存在*a*1,*d*及正整数*n*,*k*,使得,,,依次构成等比数列,则(*a*1*+*2*d*)*n+*2*k=*(*a*1*+d*)2(*n+k*),且(*a*1*+d*)*n+k*(*a*1*+*3*d*)*n+*3*k=*(*a*1*+*2*d*)2(*n+*2*k*)*.*

分别在两个等式的两边同时除以及,并令*t=*(*t>-*,*t*≠0),

则(1*+*2*t*)*n+*2*k=*(1*+t*)2(*n+k*),且(1*+t*)*n+k*(1*+*3*t*)*n+*3*k=*(1*+*2*t*)2(*n+*2*k*)*.*

将上述两个等式两边取对数,得(*n+*2*k*)ln(1*+*2*t*)*=*2(*n+k*)ln(1*+t*),

且(*n+k*)ln(1*+t*)*+*(*n+*3*k*)ln(1*+*3*t*)*=*2(*n+*2*k*)ln(1*+*2*t*)*.*

化简得2*k*[ln(1*+*2*t*)*-*ln(1*+t*)]*=n*[2ln(1*+t*)*-*ln(1*+*2*t*)],且3*k*[ln(1*+*3*t*)*-*ln(1*+t*)]*=n*[3ln(1*+t*)*-*ln(1*+*3*t*)]*.*

再将这两式相除,化简得ln(1*+*3*t*)ln(1*+*2*t*)*+*3ln(1*+*2*t*)ln(1*+t*)*=*4ln(1*+*3*t*)ln(1*+t*)*②.*

令*g*(*t*)*=*4ln(1*+*3*t*)ln(1*+t*)*-*ln(1*+*3*t*)ln(1*+*2*t*)*-*3ln(1*+*2*t*)ln(1*+t*),

则*g'*(*t*)*=.*

令*φ*(*t*)*=*(1*+*3*t*)2ln(1*+*3*t*)*-*3(1*+*2*t*)2ln(1*+*2*t*)*+*3(1*+t*)2ln(1*+t*),

则*φ'*(*t*)*=*6[(1*+*3*t*)ln(1*+*3*t*)*-*2(1*+*2*t*)ln(1*+*2*t*)*+*(1*+t*)ln(1*+t*)]*.*

令*φ*1(*t*)*=φ'*(*t*),则*φ*1*'*(*t*)*=*6[3ln(1*+*3*t*)*-*4ln(1*+*2*t*)*+*ln(1*+t*)]*.*

令*φ*2(*t*)*=φ*1*'* (*t*),则*φ*2*'*(*t*)*=>*0*.*

由*g*(0)*=φ*(0)*=φ*1(0)*=φ*2(0)*=*0,*φ*2*'*(*t*)*>*0,

知*φ*2(*t*),*φ*1(*t*),*φ*(*t*),*g*(*t*)在(*-*,0)和(0,*+∞*)上均单调*.*

故*g*(*t*)只有唯一零点*t=*0,即方程*②*只有唯一解*t=*0,故假设不成立*.*

所以不存在*a*1,*d*及正整数*n*,*k*,使得,,,依次构成等比数列*.*

7*.*(Ⅰ)用数学归纳法证明:

*①*当*p=*2时,(1*+x*)2*=*1*+*2*x+x*2*>*1*+*2*x*,原不等式成立*.*

*②*假设*p=k*(*k*≥2,*k*∈N*\**)时,不等式(1*+x*)*k>*1*+kx*成立*.*

当*p=k+*1时,(1*+x*)*k+*1*=*(1*+x*)(1*+x*)*k>*(1*+x*)(1*+kx*)*=*1*+*(*k+*1)*x+kx*2*>*1*+*(*k+*1)*x*,

所以*p=k+*1时,原不等式也成立*.*

综合*①②*可得,当*x>-*1且*x*≠0时,对一切整数*p>*1,不等式(1*+x*)*p>*1*+px*均成立*.*

(Ⅱ)解法一先用数学归纳法证明*an>.*

*①*当*n=*1时,由题设*a*1*>*知*an>*成立*.*

②假设*n=k*(*k*≥1,*k*∈N*\**)时,不等式*ak>*成立*.*

由*an+*1*=an+*易知*an>*0,*n*∈N\**.*

当*n=k+*1时,*=+=*1*+*(*-*1)*.*

由*ak>>*0得*-*1*<-<*(*-*1)*<*0*.*

由(1)中的结论得()*p=*[1*+*(*-*1)]*p>*1*+p*·(*-*1)*=.*

因此*>c*,即*ak+*1*>.*

所以*n=k+*1时,不等式*an>*也成立*.*

综合①②可得,对一切正整数*n*,不等式*an>*均成立*.*

再由*=*1*+*(*-*1),可得*<*1,即*an+*1*<an.*

综上所述,*an>an+*1*>*,*n*∈N*\*.*

解法二设*f*(*x*)*=x+x*1*-p*,*x*≥,则*xp*≥*c*,并且

*f* *'*(*x*)*=+*(1*-p*)*x-p=*(1*-*)*>*0,*x>.*

由此可得*f*(*x*)在[,*+∞*)上单调递增,因而,当*x>*时,*f*(*x*)*>f*()*=.*

①当*n=*1时,由*a*1*>>*0,即*>c*可知

*a*2*=a*1*+=a*1[1*+*(*-*1)]*<a*1,并且*a*2*=f*(*a*1)*>*,从而*a*1*>a*2*>.*

故当*n=*1时,不等式*an>an+*1*>*成立*.*

②假设*n=k*(*k*≥1,*k*∈N*\**)时,不等式*ak>ak+*1*>*成立,则

当*n=k+*1时,*f*(*ak*)*>f*(*ak+*1)*>f*(),即*ak+*1*>ak+*2*>.*

所以*n=k+*1时,原不等式也成立*.*

综合*①②*可得,对一切正整数*n*,不等式*an>an+*1*>*均成立*.*

id:2147495390;FounderCES

**A组基础题**

1*.*A依题意,取*f*(*x*)*=*,则*f* *'*(*x*)*=*,则≈*+*(*x-x*0)*.*令*x=*4*.*001,*x*0*=*4,则≈2*+×*0*.*001,注意到(2*+×*0*.*001)2*=*4*+*0*.*001*+*(*×*0*.*001)2*>*4*.*001,即*m=*的近似代替值大于*m*,故选A*.*

2*.*C若乙的说法错误,则甲、丙的说法都正确,而两人的说法互相矛盾,据此可得,乙的说法是正确的,即甲被录用了*.*故选C*.*

3*.*C13*+*23*=*()2*=*()2,

13*+*23*+*33*=*()2*=*()2,

13*+*23*+*33*+*43*=*()2*=*()2,

…

由此归纳可得13*+*23*+*33*+*43*+*…*+n*3*=*[]2,

因为13*+*23*+*33*+*43*+*…*+n*3*=*3 025,

所以[]2*=*3 025,所以*n*2(*n+*1)2*=*(2*×*55)2,所以*n=*10,故选C*.*

4*.*91由三角形数组可推断出,第*n*行共有2*n-*1个数,且最后一个数为*n*2,所以第10行共19个数,最后一个数为100,左数第10个数是91*.*

5*.n*2由1*=*12,1*+*2*+*1*=*4*=*22,1*+*2*+*3*+*2*+*1*=*9*=*32,1*+*2*+*3*+*4*+*3*+*2*+*1*=*16*=*42,…,归纳猜想可得1*+*2*+*…*+n+*…*+*2*+*1*=n*2*.*

6*.*id:2147495397;FounderCES根据题意知,5 288用算筹表示,从左到右依次是横式的5,纵式的2,横式的8,纵式的8,即id:2147495404;FounderCES*.*

**B组提升题**

7*.*C令操场的周长为*C*,则学生*B*每隔50秒看一次,学生*A*都距上一次学生*B*观察的位置(弧长),并在上一次位置的后面,故学生*B*“感觉”到学生*A*的运动是顺时针方向匀速后退的*.*

8*.*B从给出的数表可以看出,该数表每行都是等差数列,其中第一行从右到左是公差为1的等差数列,第二行从右到左的公差为2,第三行从右到左的公差为4,…,即第*n*行从右到左的公差为2*n-*1,而从右向左看,每行的第一个数分别为1*=*2*×*2*-*1,3*=*3*×*20,8*=*4*×*21,20*=*5*×*22,48*=*6*×*23,…,所以第*n*行的第一个数为(*n+*1)*×*2*n-*2*.*显然第2 017行只有一个数,其值为(2 017*+*1)*×*22 017*-*2*=*

2 018*×*22 015*.*故选B*.*

9*.*176由题意可得,

三角形数:*N=*(*n*,3)*=n*2*+n*;

正方形数:*N=*(*n*,4)*=n*2*+*0*n*;

五边形数:*N=*(*n*,5)*=n*2*-n*;

六边形数:*N*(*n*,6)*=n*2*-n*;

……

由此归纳可得*N*(*n*,*k*)*=n*2*+n*,

故*N*(8,8)*=×*82*-×*8*=*176*.*

10*.*8月4日根据甲说的“我不知道,但你一定也不知道”,可排除5月5日、5月8日、9月4日、9月6日、9月9日;根据乙听了甲的话后说的“本来我不知道,但现在我知道了”,可排除2月7日、8月7日;根据甲接着说的“哦,现在我也知道了”,可以得知张老师生日为8月4日*.*